Promenade informelle dans le monde de l'optimisation mathématique

Rentrée Académique, Septembre 2010

Les mathématiques : un langage universel

Mes objectifs :

- Montrer (par l'exemple) que l'optimisation est un langage dans lequel s'expriment et se résolvent naturellement un grand nombre de problèmes complexes et intéressants.
- Partager enthousiame et émerveillement devant la variété de son champ d'application.
- Faire passer quelques moments intellectuellement stimulants. . .

Au programme

1. Objectifs et concepts
2. Méthodes et moyens
3. Une discipline ancrée dans l'histoire
4. L'optimisation en action
   - dans l'industrie et la technologie
   - dans les sciences
   - dans la société humaine
5. Conclusions et perspectives

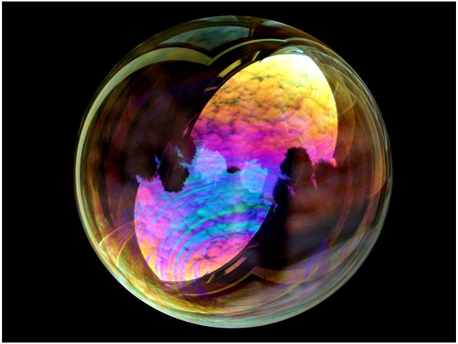
Qu'est-ce que l'optimisation mathématique ?

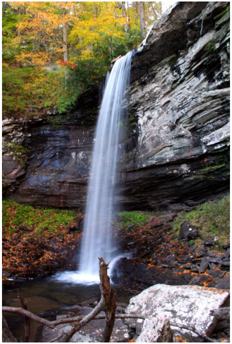
Utiliser les mathématiques pour

> effectuer le meilleur choix sous contraintes

meilleur	$\Rightarrow$	critère, fonction objective (maximiser/minimiser)
choix	$\Rightarrow$	variables dont on peut choisir la valeur
contraintes	$\Rightarrow$	restrictions sur les valeurs admissibles des variables

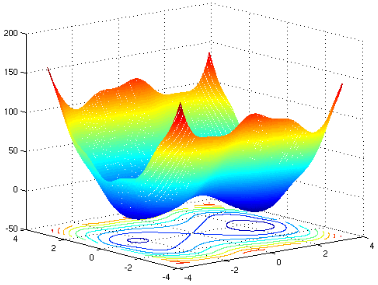
La nature optimise

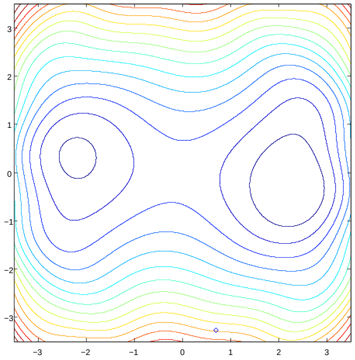




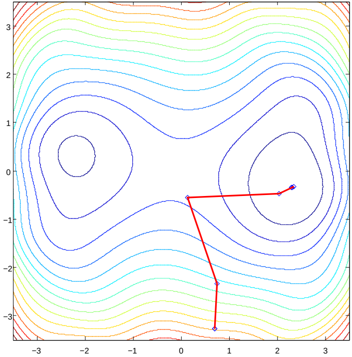
Les humains optimisent (tous les jours)

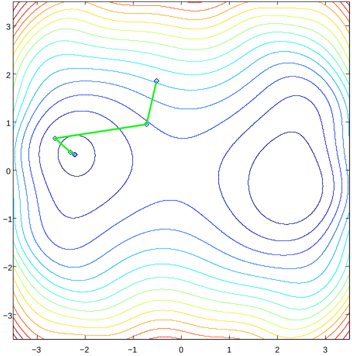
Les méthodes : une vision montagnarde . . .





Les méthodes : le chemin vers le lac





Les moyens

De puissants ordinateurs :

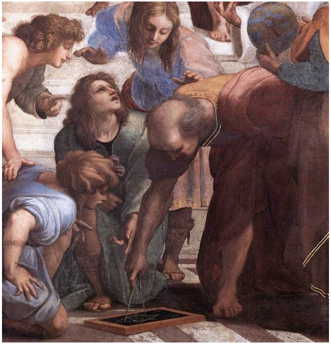
IBM Blue Gene

Les pionniers de l'optimisation

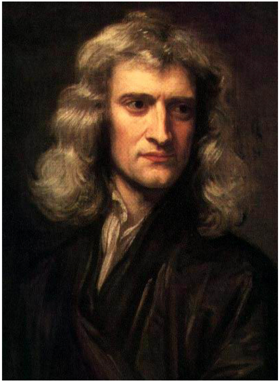
"Nous sommes comme des nains juchés sur des épaules de géants, de telle sorte que nous puissions voir plus de choses et de plus éloignées que n'en voyaient ces derniers. Et cela, non point parce que notre vue serait puissante ou notre taille avantageuse, mais parce que nous sommes portés et exhaussés par la haute stature des géants."

Bernard de Chartres (1130-1160)

Euclide (300 BC) Al-Khwarizmi (783-850)

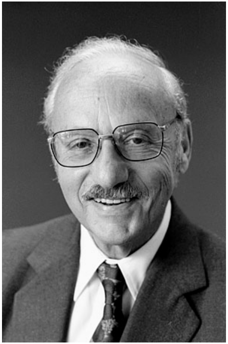


Isaac Newton (1642-1727) Leonhard Euler (1707-1783)



J. de Lagrange (1735-1813) Friedrich Gauss (1777-1855)

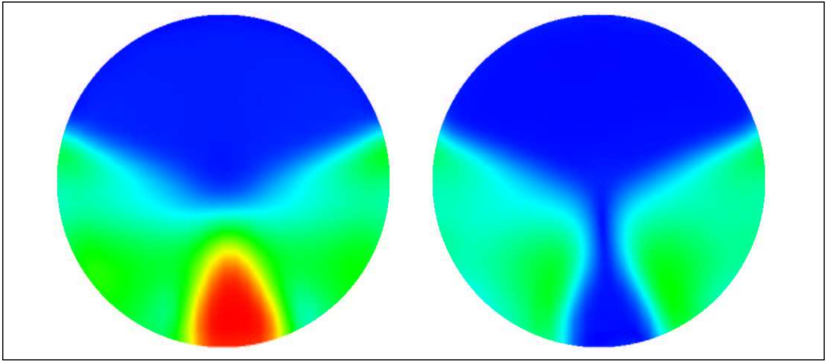
Augustin Cauchy (1789-1857) George Dantzig (1914-2005)



Le design des verres progressifs (1)

Mise au point des lentilles progressives modernes :

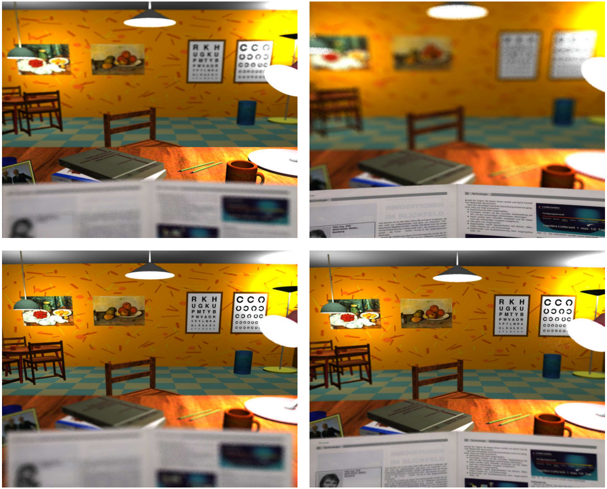
varier la puissance optique de la lentille en minimisant l'astigmatisme



Loos, Greiner, Seidel (1997)

Le design des verres progressifs (2)

Ce qu'on peut réaliser :



sans correction courte distance

longue distance verres progressifs

Le design des verres progressifs (3)

Ce problème est-il non linéaire ($\approx$ difficile) ?

Si la surface de la lentille est $z = z(x, y)$, la puissance optique est

$$p(x,y) = \frac{N^3}{2}\left[\left(1+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \left(1+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]$$

où

$$N = N(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}}.$$

L'astigmatisme de la surface est alors

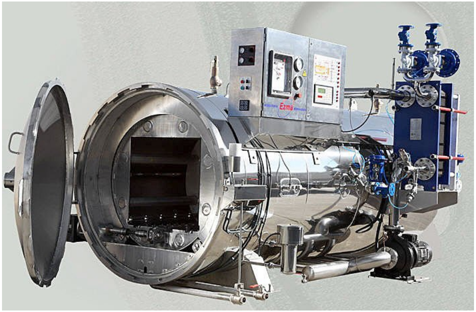
$$a(x,y) = -2\sqrt{p(x,y) - N^4\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]^2\right)}$$

La stérilisation des aliments pour nourissons (1)

Un problème très courant dans l'industrie alimentaire :

garder un max de vitamines en éliminant une fraction donnée des bactéries

chauffage des aliments dans des autoclaves à vapeur ou eau chaude



Sachs (2003)

La stérilisation des aliments pour nourissons (2)

Modèle : équations aux dérivées partielles (EDP) couplées

Concentration des micro-organismes et autres nutriments :

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x,t) = -K[\theta(x,t)]C(x,t),$$

où $\theta(x,t)$ est la température, et où

$$K[\theta] = K_1 e^{-K_2\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{\theta_r}\right)} \quad \text{(équation d'Arrhenius)}$$

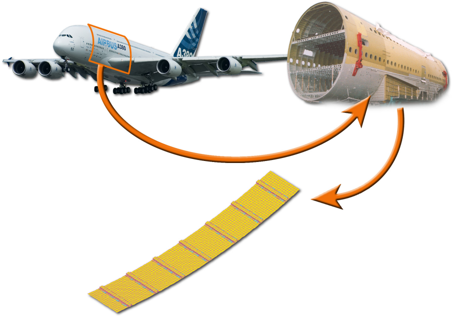
Evolution de la température :

$$\rho c(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [k(\theta)\nabla\theta],$$

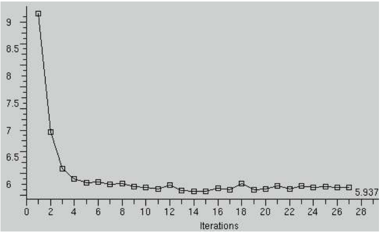
(avec conditions limites adéquates : refroidissant, température initiale, ...)

La conception de structures pour l'aéronautique

minimiser le poids du fuselage en maintenant l'intégrité structurale



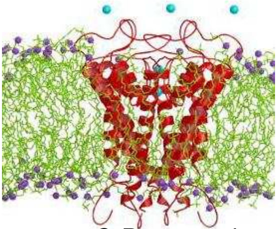
SAMTECH (2009)



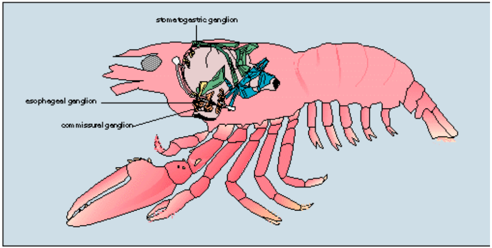
réduction de la masse
en cours d'optimisation

Une estimation de paramètres en biologie (1)

Un modèle de canal potassique dans une membrane neuronale :
Sansom (2001)



Mais où se trouvent ces neurones ? Dans un homard épineux du Pacifique (*Panulirus interruptus*) ! Simmers, Meyrand and Moulin (1995)



Une estimation de paramètres en biologie (2)

Après collection des données expérimentales
(application d'un courant à la cellule) :

estimer les paramètres du modèle pour reproduire les données au mieux

Le modèle (pour les biologistes) :

- Activation : p portes indépendantes
- Déactivation : n_h portes avec des dynamiques différentes
- BDF à 5-points sur $\approx$ 50000 pas de temps
- $\Rightarrow$ très non linéaire !

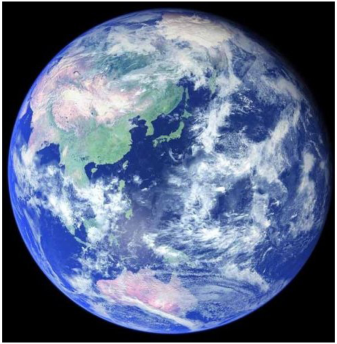
L'assimilation de données en météorologie (1)

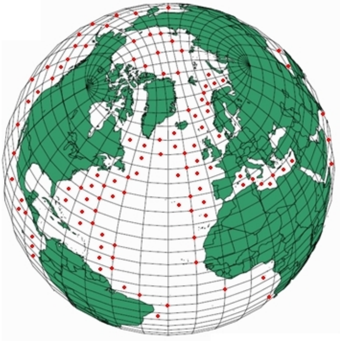
(Essayer de) prédire...

- le temps qu'il fera demain
- la température moyenne de l'océan le mois prochain
- le champ de gravité futur
- les prochains courants dans l'ionosphère
- ...

L'assimilation de données en météorologie (2)

Données : température, vent, pression, . . . partout et à tout moment !

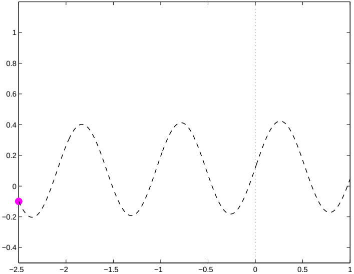




Peut contenir plus de 1.000.000.000 variables !

L'assimilation de données en météorologie (3)

Le principe :

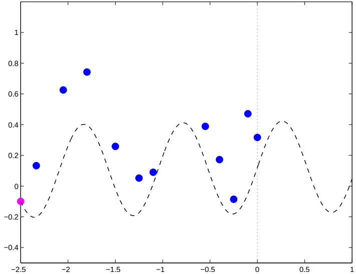


température/jours

- Situation connue il y a 2.5 jours et prévision "de fond"

L'assimilation de données en météorologie (3)

Le principe :



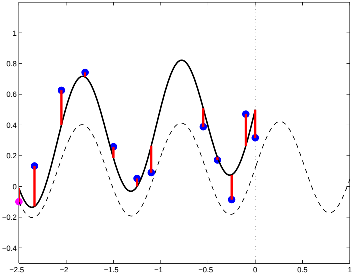
température/jours

- Situation connue il y a 2.5 jours et prévision "de fond"
- Température des 2.5 derniers jours

L'assimilation de données en météorologie (3)

Le principe :

Minimiser l'erreur entre modèle et observations passées



température/jours

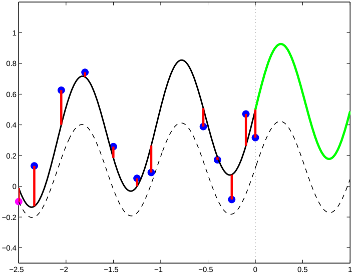
- Situation connue il y a 2.5 jours et prévision "de fond"
- Température des 2.5 derniers jours
- Faire tourner le modèle pour minimiser l'écart entre modèle and observations

$$\min_{x_0} \frac{1}{2}\|x_0 - x_b\|^2_{B^{-1}} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} \|\mathcal{HM}(t_i, x_0) - b_i\|^2_{R_i^{-1}}.$$

L'assimilation de données en météorologie (3)

Le principe :

Minimiser l'erreur entre modèle et observations passées

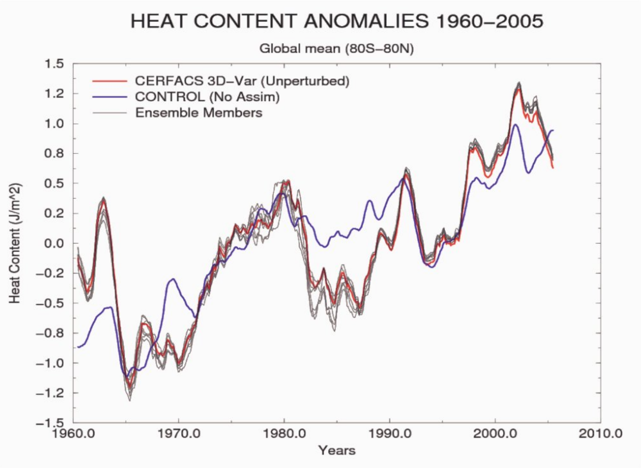


température/jours

- Situation connue il y a 2.5 jours et prévision "de fond"
- Température des 2.5 derniers jours
- Faire tourner le modèle pour minimiser l'écart | entre modèle and observations
- Predire la temperature pour demain

L'assimilation de données en météorologie (4)

Analyse du contenu de chaleur de l'océan : CERFACS (2009)



Bien meilleur ajustement !

Le débruitage d'images (1)

Considérons une image aléatoirement bruitée (noirceur des pixels incorrecte) proportionnellement à la magnitude du signal.

Comment retrouver les valeurs (noirceurs) originales ?

utiliser les valeurs des pixels le plus possible
en minimisant les transitions brutales (gradients)

Ceci donne le problème d'optimisation

$$\min_u \sum_{ij \in \Omega} (u_{ij} - z_{ij} \log(u_{ij})) + \alpha \int_\Omega \|\nabla u\|$$

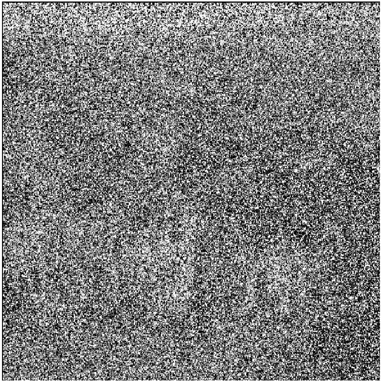
où

$$z_{ij} = u_{ij} + n f(u_{ij})$$

et n est un bruit Gaussien.

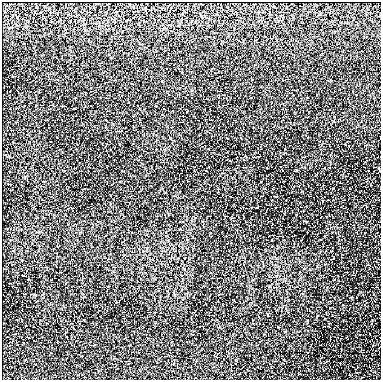
Le débruitage d'images (2)

Quelques résultats spectaculaires : une image 512×512 avec 95% de bruit



Le débruitage d'images (2)

Quelques résultats spectaculaires : une image 512 $\times$ 512 avec 95% de bruit



Chan and Chen (2007)

La reconstruction d'objets cachés

- un object $\mathcal{O}$ caché dans un milieu opaque (sol, eau, corps, ...)
- on "illumine" cet object par une onde (électromagnétique) plane dans "toutes" les directions

$$u^{inc}(x,d) = e^{ik\langle x,d\rangle} \qquad d \in \mathcal{S}$$

- on mesure les ondes réfléchies $u^s(x,d)$ par l'objet dans "toutes" les directions

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \quad \text{(en dehors de } \mathcal{O}\text{)}$$

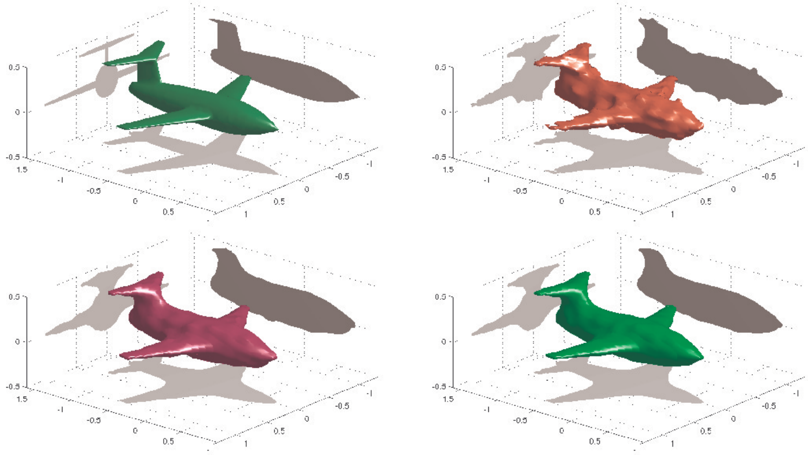
avec

$$u = u^{inc} + u^s, \qquad u = 0 \;\text{ sur }\; \partial\mathcal{O} \quad \text{et} \quad \lim_{r\to\infty} \frac{\partial u^s}{\partial r} = iku^s.$$

Optimiser la forme de l'objet $\mathcal{O}$ à partir des mesures $u^s(x,d)$

Illustration : la reconstruction d'un avion

L'original et les reconstructions ($N = 1002, p = 5, 20, 50$)



Optimisation, transports et mobilité

Le contexte

Analyse de la mobilité quotidienne en Belgique

Modélisation des déplacements

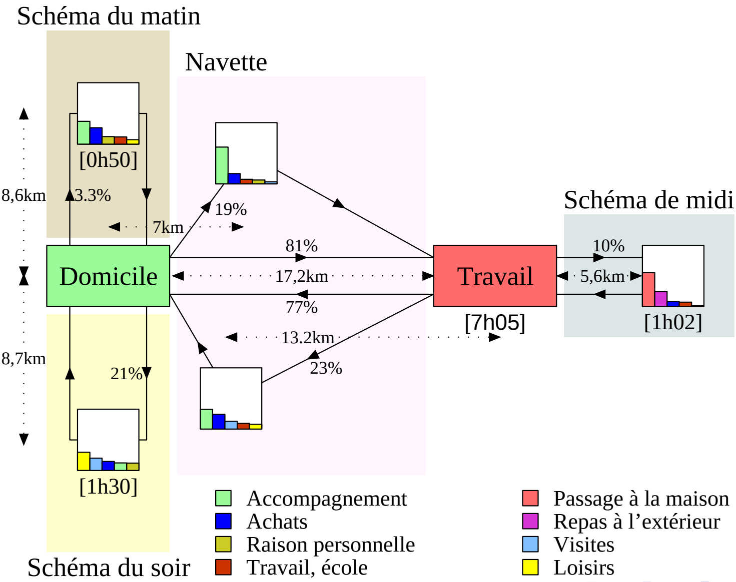
⇓

Modélisation des activités

⇓

Modélisation des individus (ou ménages)

La mobilité quotidienne : un système complexe



- Accompagnement
- Achats
- Raison personnelle
- Travail, école
- Passage à la maison
- Repas à l'extérieur
- Visites
- Loisirs

Comprendre les stratégies de choix en société

Contexte : simulation des choix individuels en Mobilité (mode, trajet, heure de départ, ...)

Théorie de l'utilité aléatoire

Un individu i assigne à l'alternative j l' "utilité"

$$U_{ij} = [\text{ paramètres } \times \text{ facteurs explicatifs}] + [\text{ erreur aléatoire }]$$

Illustration :

$$U_{bus} = \text{distance} - 1.2 \times \text{prix du billet} - 2.1 \times \text{retard par rap. au trajet en voiture} + \epsilon$$

Les modèles de choix discrets (1)

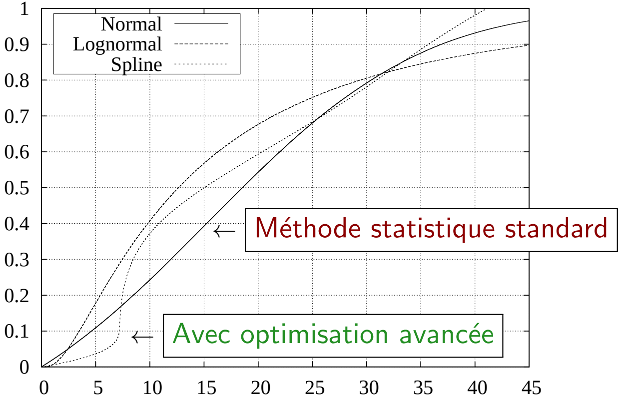
Probabilité qu'un individu i choisisse l'alternative j plutôt que l'alternative k donnée par

$$\text{prob}\,(U_{ij} \geq U_{ik} \quad \text{pour tout} \quad k)$$

Données : enquêtes de mobilité (MOBEL, BELDAM, etc.)

trouver les paramètres de l'utilité qui
maximisent la vraisemblance des comportements observés

Les modèles de choix discrets (2)



Estimation de la valeur du temps perdu dans les embouteillages (avec et sans optimisation avancée)

Modéliser les individus ?

Une difficulté majeure

- Données individuelles (souvent) indisponibles/incohérentes. . .
  (coût, vie privée, sources variables)

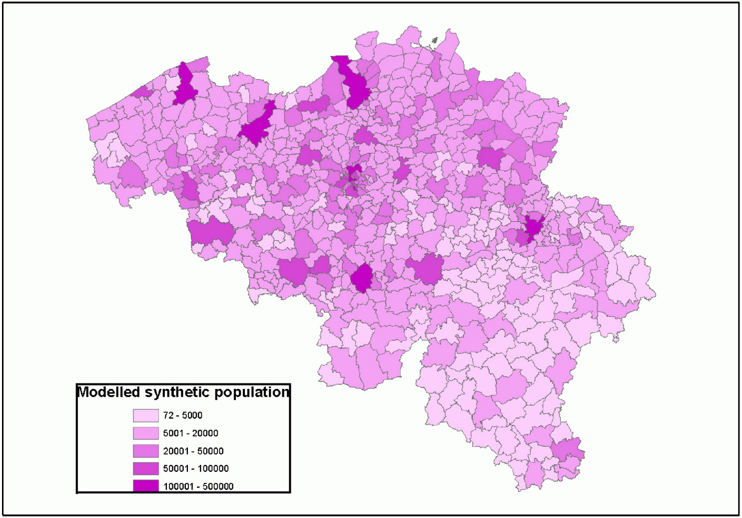
Construire une population synthétique

Méthode

- maximiser la vraisemblance des descriptions des individus/ménages
- en préservant les statistiques connues sur la population réelle

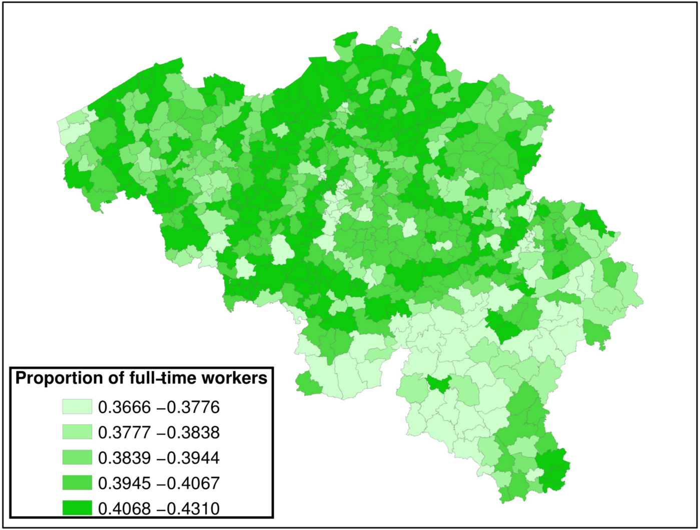
Une population synthétique pour la Belgique

Et l'on obtient ≈ 10.600.000 individus dans 4.400.000 ménages



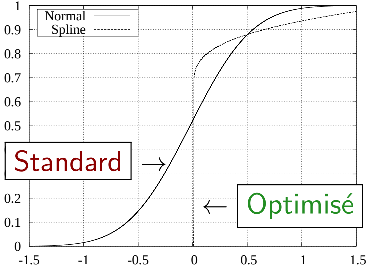
Une population synthétique pour la Belgique

D'où l'on peut déduire (en utilisant d'autres techniques d'optimisation)



Et en finance...

1. gestion du risque
2. analyse de portfolios
3. marchés des changes



Distribution des investissements de la BoJ 1991-2004

4. ...

Everybody likes an optimizer !

Quelques conclusions

Le langage mathématique est extraordinairement *souple, adapté, élégant et efficace*.

Les mathématiques appliquées sont un domaine en plein développement.

L'optimisation et l'analyse des systèmes complexes sont sur le devant de la scène.

Un regret : ne pas avoir pu vous partager la fulgurance de la théorie. . .

Perspectives

Et maintenant…

NAΞYS

Namur Research Center on Complex Systems

Centre Namurois de Recherche sur les Systèmes Complexes

…de nombreuses nouvelles collaborations et projets en perspective …

Merci de votre patiente attention.

(Merci aussi à N. Gould, A. Conn, A. Sartenaer, S. Gratton, D. Orban, …)

Excellente année académique 2010-2011 !