

# Choix discrets et transports: applications et méthodologie

Fabian Bastin<sup>3</sup>    Cinzia Cirillo<sup>1</sup>    Eric Cornélis<sup>2</sup>    Philippe Toint<sup>2</sup>

<sup>1</sup>University of Maryland, USA

<sup>2</sup>Facultés ND de la Paix, Namur, Belgique

<sup>3</sup>Université de Montréal, Canada

( [philippe.toint@fundp.ac.be](mailto:philippe.toint@fundp.ac.be) )

Optimisation et réseaux, Paris, Octobre 2008

## 1 Choix discrets

## 2 Modèles plus flexibles

- Logit emboîté : corrélation entre alternatives
- Mixed logit : hétérogénéité de la population

## 3 Conclusions

## 1 Choix discrets

## 2 Modèles plus flexibles

- Logit emboîté : corrélation entre alternatives
- Mixed logit : hétérogénéité de la population

## 3 Conclusions

- 1 Choix discrets
- 2 Modèles plus flexibles
  - Logit emboîté : corrélation entre alternatives
  - Mixed logit : hétérogénéité de la population
- 3 Conclusions

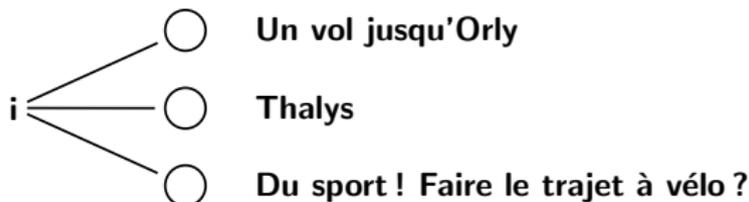
# Une introduction aux choix discrets

# Théorie des choix discrets

Dans les domaines de l'économie, du marketing, du **transports** :

Choix d'un individu  $i$  (extrait d'une population de taille  $N$ ) dans un ensemble discret  $\mathcal{A}(i)$ .

Pour participer à cette journée :



A chaque alternative  $j \in \mathcal{A}(i)$  on associe une **utility** :

$$U_{ij} = V_{ij}(\beta) + \epsilon_{ij}$$

$\beta$  : paramètres à estimer,  $\epsilon_{ij}$  : utilité **aléatoire**

L'individu  $i$  choisit l'alternative d'utilité maximale

# Comment estimer ?

L'individu  $i$  est rationnel et choisit  $A_j$  si

$$U_{ij} \geq U_{in}, \forall A_n \in \mathcal{A}(i).$$

Probabilité du choix de  $A_j$  par l'individu  $i$  :

$$P_{ij}(\beta) = P[V_{ij}(\beta) + \epsilon_{ij} \geq V_{in}(\beta) + \epsilon_{in}, \forall A_n \in \mathcal{A}(i)].$$

**Cas important** : **logit** multinomial (distribution de Gumbel pour  $\epsilon_{ij}$ ) :

$$P_{ij} = \frac{e^{V_{ij}}}{\sum_{k=1}^{\#\mathcal{A}_i} e^{V_{ik}}}.$$

Estimation par le **maximum de vraisemblance** :

$$\max_{\beta} LL(\beta) = \max_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln P_{ij_i}.$$

# Pour aller plus loin . . .

Limitations des modèles logit :

- 1 Le logit multinomial n'est pas adapté aux **alternatives corrélées** (itinéraires dans un réseau).
- 2 Logit représente les **variations systématiques** (liées aux caractéristiques observées du décideur), mais pas les **variations aléatoires** (non liées aux caractéristiques observées)
- 3 Le modèle logit implique une **substitution proportionnelle** entre alternatives,
- 4 Si les **facteurs non observés** sont **indépendants** au cours de temps, le modèle logit capture bien la dynamique des choix répétés, mais ce n'est pas le cas si ces facteurs sont **corrélés**.

⇒ modèles plus flexibles

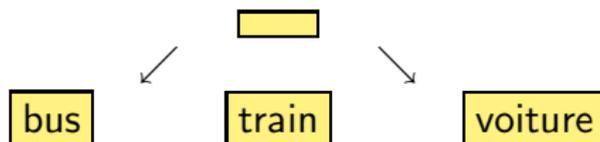
## Logit emboîté : corrélation entre alternatives

# Représenter les corrélations entre alternatives

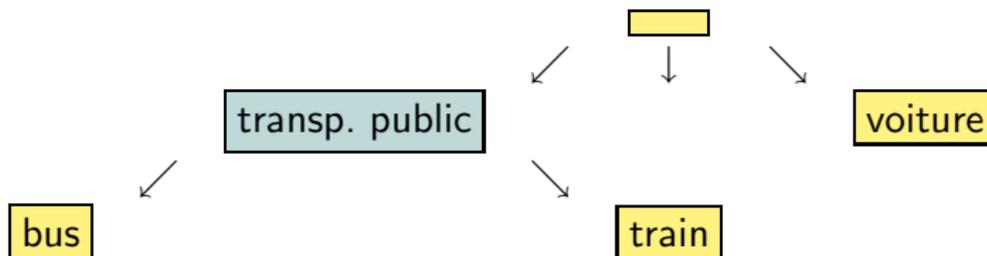
Regrouper les alternatives corrélées en **nids** : **logit emboîté**

$$U_{ij}(\beta) = W_{ik}(\beta) + Y_{ij}(\beta) + \epsilon_{ij}$$

où alternative  $j$  appartient au nid  $k$ .



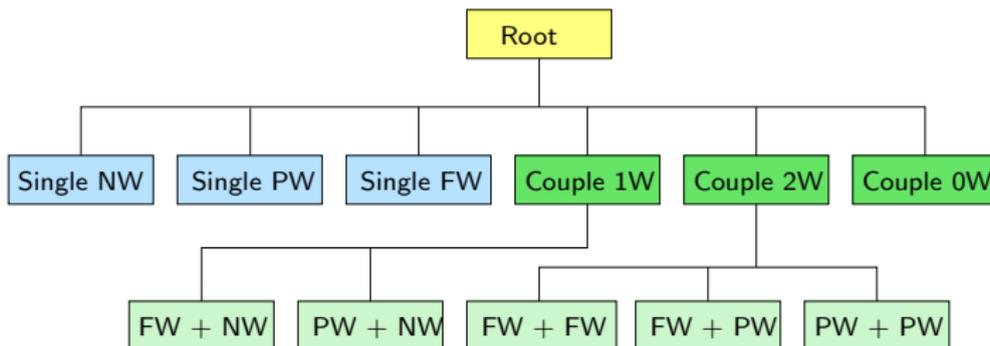
devient



# Un exemple

Choix du **rythme de travail hebdomadaire dans les ménages** de sBelgium

Modelisés : chefs de ménage et partenaire



Pour un jour moyen :

- 44 paramètres de l'utilité déterministe
- 7173 observations provenant de 3 ensembles de données (MOBEL, OVG, RW)
- habitants de 589 communes belges

# Estimation des modèles par jour

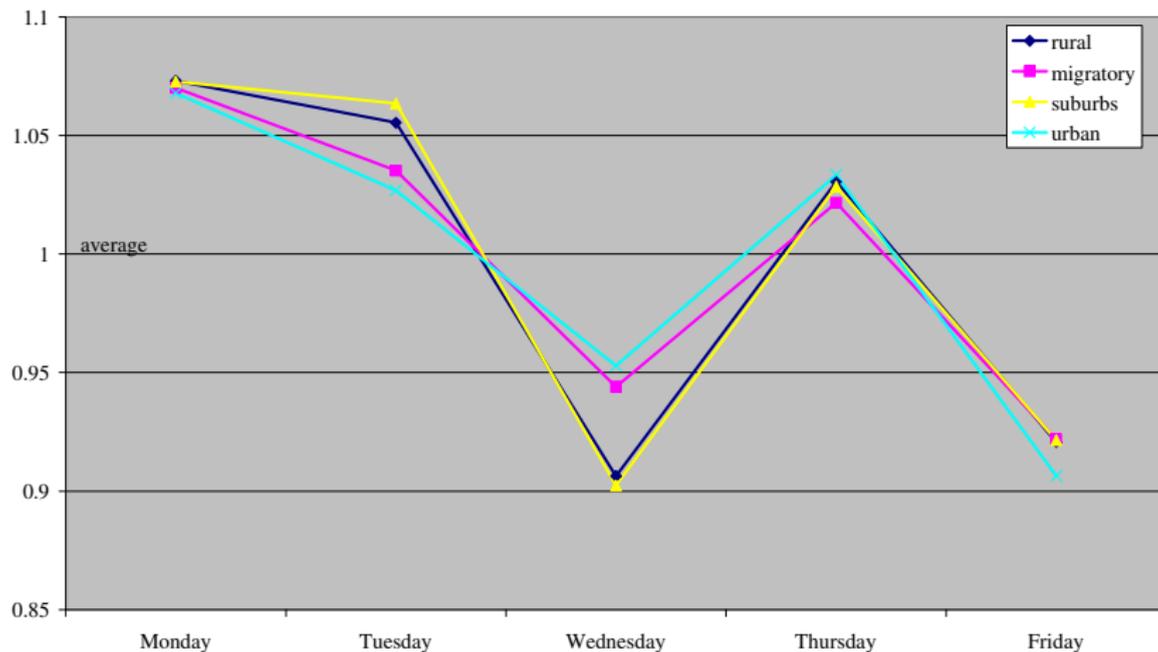
## Calibration

- sur un jour moyen et sur les jours de semaine
- en utilisant le logiciel **AMLET** (<http://www.grt.be/amlet>)

	Moyen	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi
L-vrais. finale	-9014.8	-1883.9	-1753.5	-1740.6	-1722.4	-1810.6
#paramètres	44	41	41	41	41	41
Observations	7173	1507	1444	1424	1388	1410
$\rho^2(0)$	0.230	0.232	0.261	0.253	0.238	0.212
$\rho^2(c)$	0.065	0.067	0.076	0.070	0.069	0.068

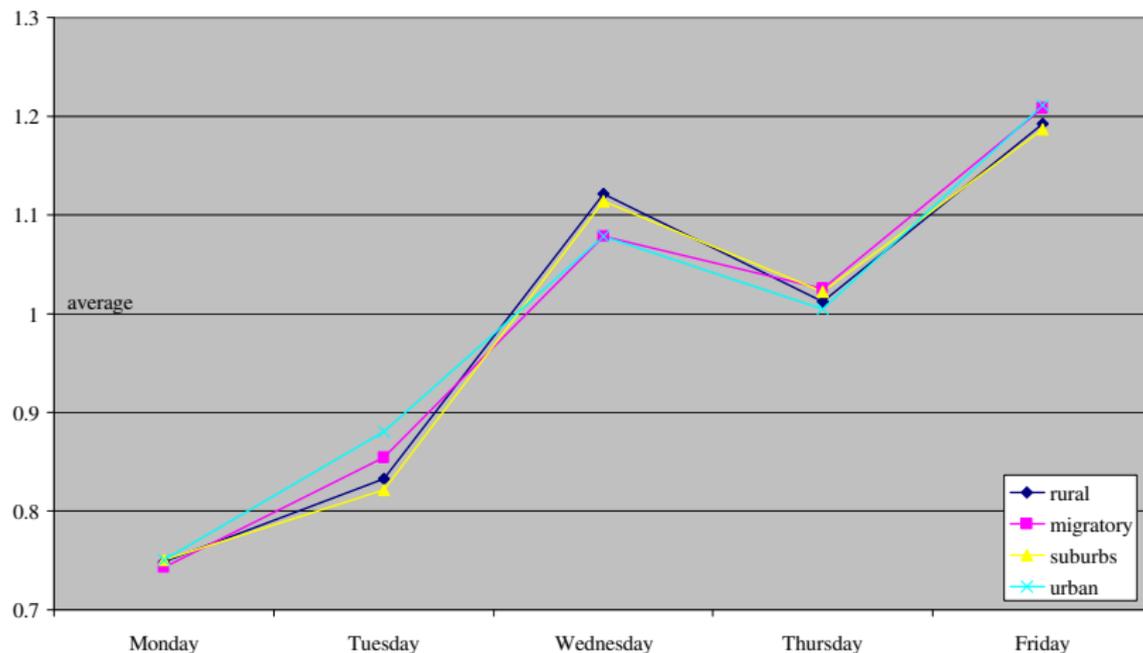
⇒ variabilité entre jours et entre communes

# Profil hebdomadaire pour les travailleurs à temps plein



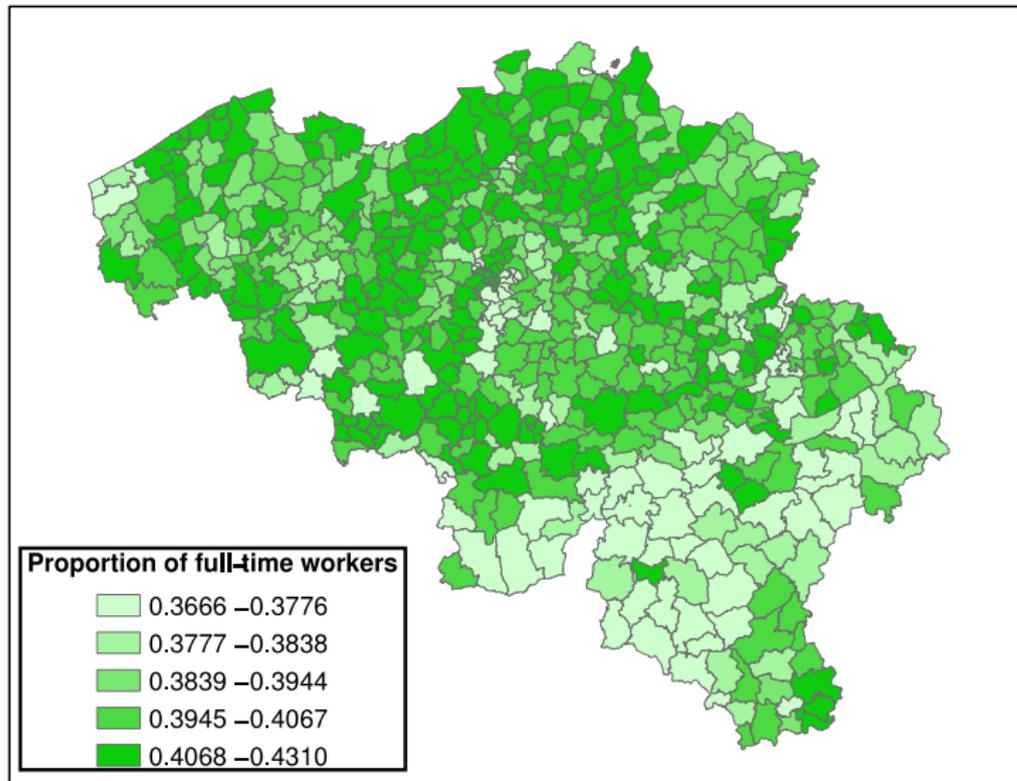
Deviation de la moyenne hebdomadaire du nombre de travailleurs à temps-plein  
(moyenne sur toutes les communes)

# Profil hebdomadaire pour les travailleurs à mi-temps

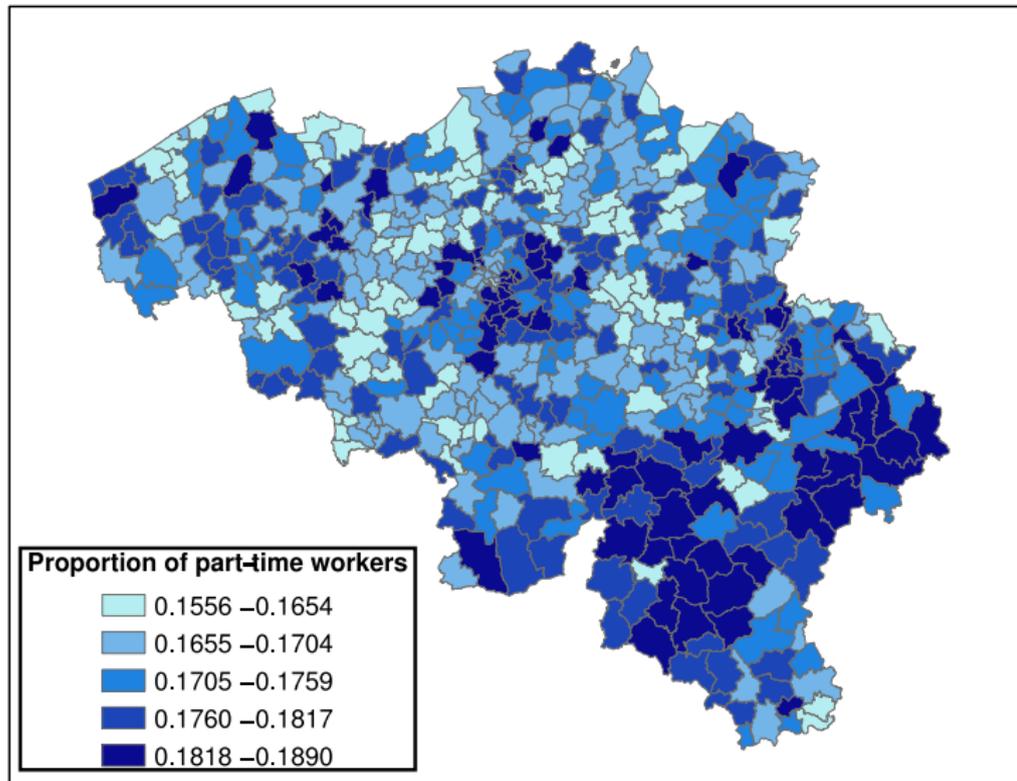


Deviation de la moyenne hebdomadaire du nombre de travailleurs à mi-temps  
(moyenne sur toutes les communes)

# Travailleurs à temps plein dans sBelgium



# Travailleurs à mi-temps dans sBelgium



# Mixed logit : hétérogénéité de la population

# Représenter l'hétérogénéité dans la population

Estimation des paramètres par un modèle **mixed logit** (logit mixé?) : courant en analyse par choix discrets

$$\beta = \beta(\gamma, \theta),$$

$\gamma$  : vecteur **aléatoire**, par exemple : indépendantes  $N(0, 1)$  ;

$\theta$  : vecteur de paramètres, ex : moyenne et déviation standard

Probabilité du choix de  $A_j$  par l'individu  $i$  :

$$P_{ij}(\gamma, \theta) = E_{\gamma} [L_{ij}(\gamma, \theta)] = \int L_{ij}(\gamma, \theta) f(\gamma) d\gamma.$$

requiert estimation  $\Rightarrow$  **échantillonnage**  $\gamma_t$  (quasi) Monte Carlo

# Estimation des modèles mixed logit

$$SP_{ij}(\gamma, \theta) \approx \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R P_{iji}(\gamma_r, \theta)$$

Analogie avec la programmation stochastique :

$$\max_{\theta} SLL(\theta) = \max_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln SP_{iji}^R(\gamma, \theta)$$

Optimisation non convexe  $\Rightarrow$  algorithmes sophistiqués

- méthodes de région de confiance + échantillonnage adaptatif
- AMLET

# Comment choisir la distribution de l'échantillon ?

On utilise souvent des distributions paramétriques pour l'estimation, **mais**

- 1 quelle est la distribution la plus **appropriée** ?
- 2 les distributions **non bornées** donnent des résultats difficiles à interpréter
- 3 on a souvent peu d'information sur les **queues de distribution**

*"It is not possible to identify the distribution to use in all situations; the best distribution-fit is highly situation dependent."*

Train and Weeks, 2005

# Retour au tirage d'un échantillon aléatoire

Comment tirer un échantillon d'une distribution univariée ?

$$X = F_X^{-1}(U[0, 1]).$$

où  $F_X$  est la **distribution cumulative inverse**.

Si  $X$  (et  $F_X$ ) est inconnu, on construit  $F_X^{-1}$  comme

$$F_X^{-1}(\cdot) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k h_k(\cdot),$$

où  $h_k$  sont des éléments d'un espace fonctionnel approprié  
(la série peut être tronquée)

**Contrainte** :  $F_X$  (and  $F_X^{-1}$ ) doit être **monotone croissante**.

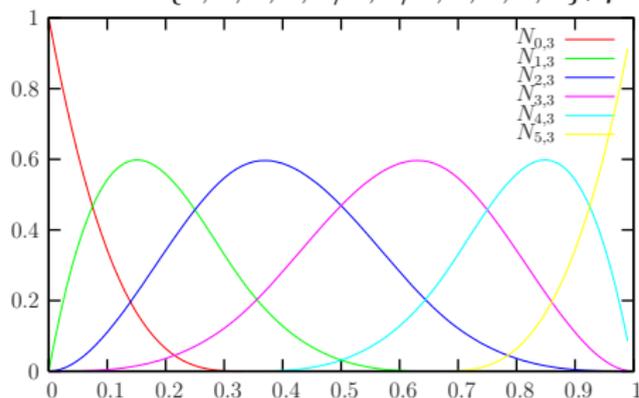
# Un choix non paramétrique

**Hypothèse** : variables aléatoires à support borné

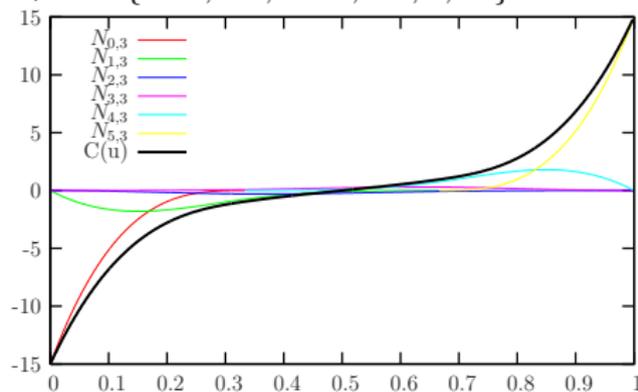
Une proposition :

approximer  $F_X^{-1}$  par des **B-splines** croissantes de degré  $p$ .

Ex :  $U = \{0, 0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1, 1\}$ ,  $p = 3$ ,  $P = \{-15, -3, -0.5, 0.5, 3, 15\}$ .



fonctions de base



spline résultante

Possible en imposant des **valeurs croissantes** aux **noeuds des splines**

# Application : estimation de la la disposition à payer sur bandes HOV

Enquête IRIS dans la région de Bruxelles en 2002. Les répondants sont des conducteurs, interceptés à la pointe du matin sur un périmètre donnant accès aux zones suburbaines.

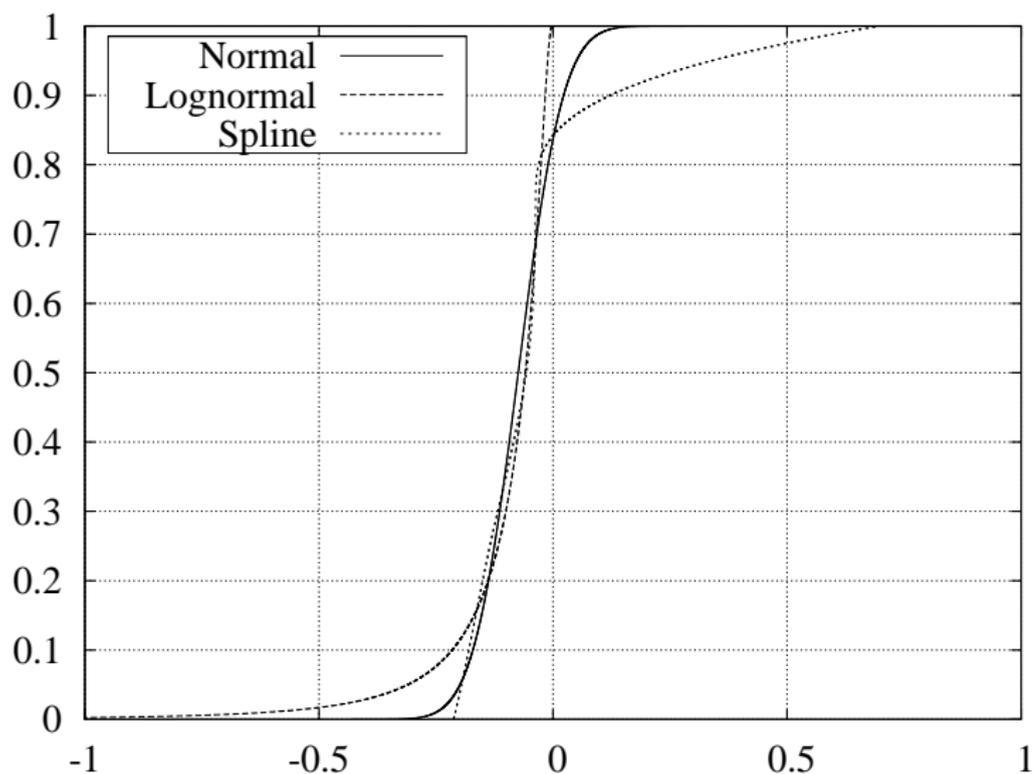
Choix entre 3 scénarii, chacun contenant 4 options :

- voiture,
- voiture avec départ retardé,
- transport public, et
- voiture sur une bande HOV (prospectif).

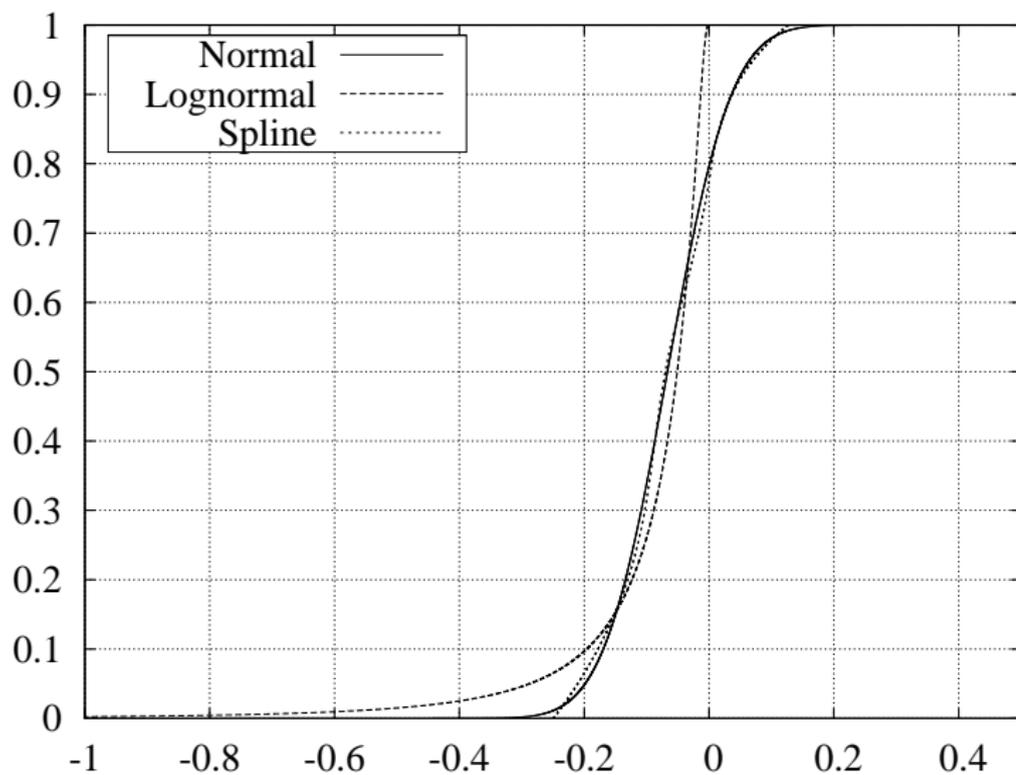
18 paramètres, **distribution non paramétrique pour la valeur du temps/coût**

2602 observations pour 871 individuals.

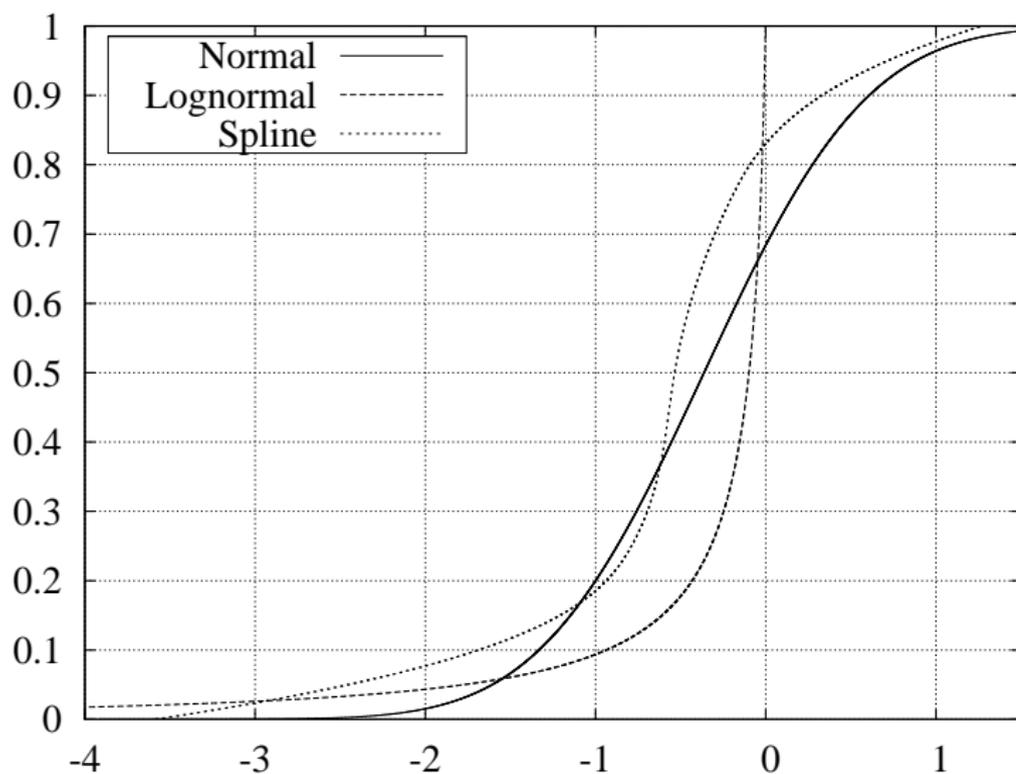
# Temps de déplacement en congestion



# Temps de déplacement à vitesse libre



## Coût



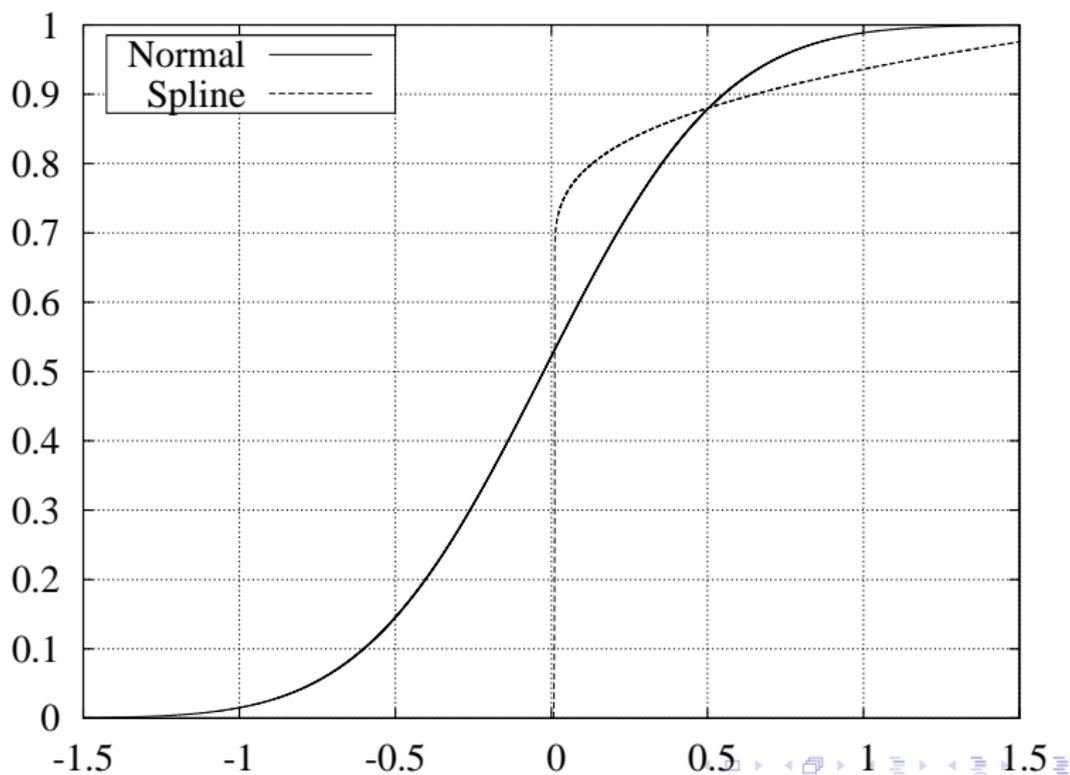
# Autre application : intervention des banques centrales

Banque centrale du Japon pour la période d'avril 1991 à septembre 2004.  
4 possibilités lors d'une décision de la BoJ :

- pas d'intervention,
- intervention publique,
- intervention secrète, mais détectée par le marché,
- intervention secrète non détectée

15 paramètres, **distribution non paramétrique pour le montant de l'intervention**

# Distribution du montant de l'intervention



# Conclusions

Choix discrets bien adaptés à de nombreux modèles

Variante adaptées aux hypothèses spécifiques

Problèmes d'optimisation (estimation) intéressants

Bons algorithmes (théoriquement et pratiquement)

Logiciels disponibles (AMLET)

Merci de votre attention !