L'optimisation numérique appliquée au calcul des lentilles progressives

Philippe Toint et Dimitri Tomanos

8 décembre 2008

Avec l'âge apparaît chez tout être humain la difficulté de voir clairement des objets proches. En fait, le cristallin de l'oeil se durcit et perd sa faculté d'accommodation, c'est-à-dire sa capacité d'adapter sa courbure, ce qui empêche la formation correcte des images sur la rétine lorsque les objets se trouvent à de courtes distances. Ce phénomène s'appelle la presbytie et il peut être combiné à d'autres problèmes optiques comme la myopie par exemple. Il existe plusieurs manières de corriger simultanément deux problèmes à l'aide de différents types de lunettes. Premièrement, l'utilisateur peut recourir à deux paires de lunettes différentes, l'une pour voir des objets éloignés et l'autre lors de la lecture par exemple. Cependant, l'utilisation de deux paires différentes n'est pas très pratique. Il peut aussi utiliser des lunettes *bifocales* qui se caractérisent par une zone du verre dédiée uniquement à la vision rapprochée alors que le reste du verre est destiné à la vision des objets lointains (voir la Figure 1). Mais il y a alors une transition brusque et perturbatrice dans la vision. Enfin, la solution la plus élégante est l'utilisation de lentilles progressives. Ces lentilles sont caractérisés par plusieurs zones. La zone supérieure est dédiée à la vision lointaine, la portion inférieure à la vision de près et la particularité de la lentille progressive est l'ajout entre ces deux zones, d'une portion intermédiaire qui permet de voir des objets à une distance intermédiaire (voir la Figure 1). La lentille est construite en rendant cette transition entre les zones la plus progressive possible afin de réduire l'inconfort de l'utilisateur.

En pratique, il n'est pas simple de représenter mathématiquement la surface d'une lentille progressive. Il est en effet impossible d'utiliser une section de sphère ou une autre conique comme on le fait pour les autres types de lentille. De plus, pour corriger les problèmes optiques de l'utilisateur, on doit imposer une certaine *puissance optique* qui varie progressivement sur la lentille. Cette adaptation progressive crée inévitablement une aberration optique, appelée *astigmatisme*, qui a pour effet de rendre les images floues. Le but du design d'une lentille progressive est donc de corriger les problèmes de l'utilisateur et de repousser ce flou vers les zones latérales du verre qui sont les moins utilisées.

Mais ce problème est très complexe et la plupart des algorithmes existants échouent à trouver la surface optimale. Nous avons donc construit une nouvelle méthode d'optimisation appelée optimisation multi-niveaux que nous avons appliquée au problème. Les concepts de cette méthode sont dérivés des méthodes multigrilles utilisées pour résoudre des systèmes linéaires. Dans le cadre de l'optimisation de surface, et plus généralement dans celui de l'optimisation des

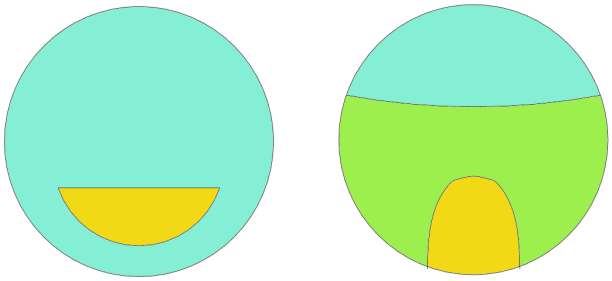

FIG. 1 – A gauche, un exemple de lentille bifocale et à droite un exemple de lentille progressive. On a représenté en jaune la zone dédiée à la vision rapprochée, en vert celle dédiée à la vision intermédiaire et en bleu celle dédiée à la vision lointaine.

problèmes en dimension infinie, une méthode souvent utilisée est la discrétisation sur une grille. On ne considère plus le problème comme étant continu mais on prend en considération une discrétisation de celui-ci sur cette grille : on doit alors trouver la valeur que prend la solution du problème aux points de la grille. La solution ainsi obtenue donne une bonne idée du comportement de la solution en dimension infinie car une approximation de celle-ci peut alors être obtenue par interpolation.

Plus la grille est fine, c'est à dire plus le nombre de points choisi pour représenter la fonction continue est élevé, mieux le problème discrétisé représente le problème continu. Cependant, la résolution du problème discrétisé est d'autant plus difficile et longue que le nombre de points est important.

On peut alors tenir compte de la structure du problème. En effet, celui-ci peut être représenté par plusieurs grilles avec plus ou moins de points mais il y a un lien entre ces problèmes discrétisés sur ces grilles puisqu'ils découlent du même problème continu. En fait, en résolvant le problème sur une grille ne contenant pas beaucoup de points, on obtient une solution qui, même si elle n'atteint pas le niveau de précision requis, donne une bonne approximation de départ pour la résolution du problème sur une grille plus fine. Ceci est très important car la plupart des méthodes de calcul sont fortement dépendantes du point de départ : elles sont plus rapides si celui-ci est proche de la solution. On espère donc que le temps passé à résoudre le problème sur la grille grossière va être compensé par le temps gagné lors de la résolution du problème fin.

On peut alors utiliser ce principe récursivement sur plusieurs grilles. En effet, on peut construire, à partir de la grille fine, des grilles de plus en plus grossières, contenant de moins en moins de points. En résolvant le problème sur la grille la plus grossière, on obtient une bonne approximation de départ pour la résolution du problème sur la grille du niveau supérieur et on peut remonter ainsi les niveaux un à un, et atteindre finalement la grille la plus fine avec une très bonne approximation de départ.

Une fois cette approximation obtenue, on peut continuer à exploiter les grilles les plus grossières pour obtenir la solution approximative du problème au niveau fin en tirant profit des méthodes de relaxation, dites de lissage, qui sont utilisées afin de diminuer l'erreur faite par l'approximation. En effet, on peut décomposer cette erreur en fonctions sinusoïdales que l'on classe en deux

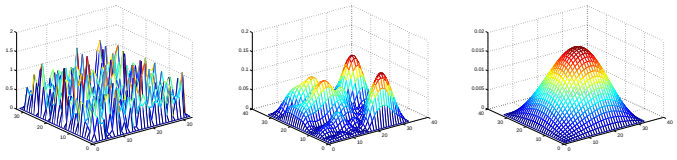

FIG. 2 – Evolution de l'erreur d'un système linéaire. Les figures représentent l'erreur initiale et l'erreur après 10 et 100 itérations de la méthode de Gauss-Seidel.

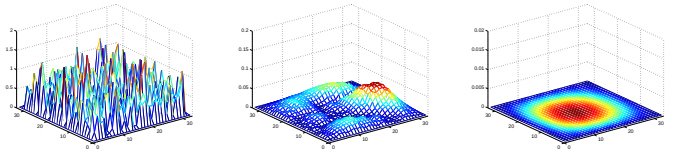

FIG. 3 – Evolution de l'erreur d'un système linéaire. Les figures représentent l'erreur initiale et l'erreur après 10 et 100 itérations de la méthode multigrille.

catégories. Les composantes de l'erreur dont la fréquence est élevée sont dites oscillantes et les autres sont appelées lisses. Les méthodes de relaxation (comme la méthode de Gauss-Seidel par exemple) sont très efficaces pour éliminer les composantes fortement oscillantes de l'erreur mais sont ensuite assez lentes pour éliminer les composantes lisses (voir Figure 2). Or, ces composantes lisses apparaissent plus oscillantes quand on les représente sur la grille grossière. Le principe des méthodes multigrilles est donc d'utiliser, lorsque les méthodes de relaxation stagnent à un certain niveau, ces mêmes méthodes de relaxation mais aux niveaux inférieurs. Cela a l'avantage d'être plus efficace car, comme nous l'avons dit plus tôt, l'erreur y apparaît plus oscillante, et d'être moins coûteux puisque les grilles aux niveaux inférieurs ont moins de points. Cette combinaison des méthodes de relaxation et de l'utilisation des niveaux inférieurs fait de la méthode multigrille une méthode extrêmement efficace (voir la Figure 3 où la méthode est appliquée sur le même problème que celui représenté à la Figure 2).

Ce principe est utilisé depuis longtemps dans le cadre de la résolution de systèmes linéaires et plus particulièrement dans le cadre des systèmes linéaires issus d'équations différentielles pour lesquels il est connu que les méthodes multigrilles sont très efficaces. Nous avons adapté récemment les principes des méthodes multigrilles à l'optimisation non linéaire.

Les méthodes d'optimisation non-linéaire construisent une suite d'itérés et on espère que celle-ci va converger vers un minimum de la fonction objectif. Une méthode classique est la méthode de Newton. Celle-ci a cependant le désavantage de ne pas être une méthode globale, c'est-à-dire qu'elle ne converge pas depuis n'importe quel point de départ, ce qui est très problématique si on a aucune idée de la solution du problème d'optimisation. Pour pallier ce problème, il faut avoir recours à des techniques dites de globalisation. Une de ces techniques les

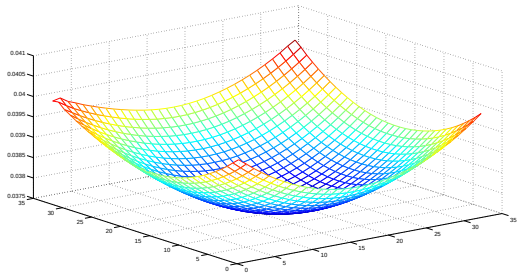

FIG. 4 – Solution obtenue par notre méthode

plus connues est la méthode de région de confiance. Cette méthode construit, autour de chaque itéré, un modèle, c'est-à-dire une approximation de la fonction objectif, auquel on fait confiance dans un voisinage de l'itéré appelé région de confiance. La méthode consiste en minimisations successives du modèle à l'intérieur de la région de confiance, ce qui a l'avantage de ne pas être coûteux puisque les modèles sont construits de sorte à ne pas être complexe à minimiser. A chaque itération, le modèle ainsi que le voisinage sont mis à jour. Cette méthode de région de confiance est une des méthodes les plus performantes pour l'optimisation non-linéaire, et nous l'avons adaptée en y introduisant les principes multigrilles. A chaque itération de notre méthode, appelée méthode d'optimisation multi-niveaux, on construit deux modèles, le premier est un modèle classique de région de confiance et le deuxième est un modèle qui tient compte de la structure multi-niveaux du problème. La minimisation du modèle classique sera faite par une adaptation des méthodes de relaxation présentées plus tôt afin d'obtenir les meilleurs résultats possibles. Il devient alors possible, grâce à cette nouvelle méthode, de résoudre des problèmes d'optimisation de plusieurs millions de variables en quelques secondes sur un ordinateur classique. Et des tests numériques poussés ont montré que notre méthode est de loin la plus performante pour les problèmes multi-niveaux.

Nous avons appliqué cette méthode à notre problème de design d'une lentille progressive et de très bons résultats ont pu être obtenus. Pour des raisons de confidentialité, il n'est pas possible de représenter ici les résultats sur des données réelles, mais la figure 4 illustre la solution d'un problème avec des données plus simples. De nouvelles perspectives sont donc ouvertes pour cette application importante qui concerne la vie quotidienne de tous.